Данная серия методичек по электроду посвящается лучшему семинаристу по электроду
Однажды на его семинар пришёл Денисов
Пришлось на время отказаться от кулстори про математиков
Как хорошо, что сейчас они вернулись

Семинарист: Хорошо, задача 27.1 решена. (Подходит к самому умному студенту нашей группы – его любимчику): Я думаю, что вам стоит изучить конформную теорию поля. (И далее дискуссия на 10 мин со студентом о наиболее удачных полевых теориях).

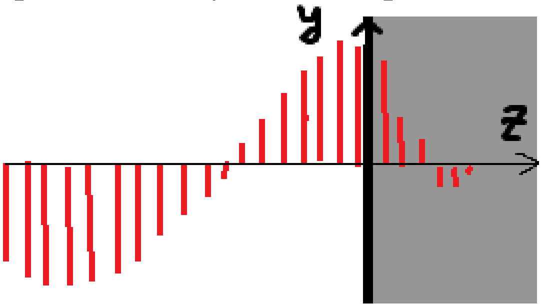
Всё, стационарные токи кончились, теперь переходим к синусоидальным полям и токам. Там, например, есть такое явление, как скин-эффект.

Что это скин-эффект? Это эффект, когда проводник помещён в ***переменное синусоидальное*** магнитное поле

$$\mathbf{B}(t)=B_0\mathbf{e_y}\cos(\omega t)$$

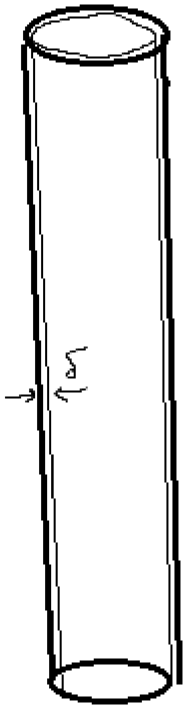
И это магнитное поле проникает в проводник не полностью. Обозначив за z удаление от границы, ***приближённо***

$H=H_0e^{-z/б}e^{i(z/б-\omega t)}$, где б – т.н. толщина скин-слоя, характеризующая, как быстро убывает магнитное поле. Зависит от материала проводника. Имеет смысл длины, на которой поле затухает в e раз.
Я попытался изобразить: шла синусоида… а потом попала в проводник… и усё. Пришлось затухать быстренько:



Сделал анимашку в Десмосе: https://www.desmos.com/calculator/w7bomks4z0
Запустите ползунок по t и посмотрите.
Вы уже делали задачу на скин-эффект №338 в практикуме по элмагу. Помните, как вы вставляли стержни в магнитное поле?

В них в силу скин-эффекта магнитное поле (расположенное нормально к виткам, т.е. вертикально) проникало только на очень небольшую глубину – б, толщину скин-слоя:



Различают сильный скин-эффект и слабый скин-эффект. В анимашке https://www.desmos.com/calculator/ozxy1kpviq вы можете сами посмотреть, как зависит поведение магнитного поля от параметра толщины скин-слоя.

Сильный скин-эффект (б мало) – магнитное поле затухает очень быстро в проводнике, практически мгновенно. При решении задач можно считать, что затухает настолько быстро, что на границе поле уже должно быть нулём, мы это увидим в 27.1, где будет сильный скин-эффект.

Слабый скин-эффект (б велико) – магнитное поле почти не затухает и спокойно, не меняясь, заходит внутрь проводника. Как правило, оно там начинает диктовать свои порядки и может породить электрическое. Мы про это в 27.3 и 27.3а поговорим, где будет слабый скин-эффект.

Выводить, почему скин-эффект образуется, мы не будем, а задачи порешаем.

ЗАДАЧА 27.1

27.1. Проводящий шар (радиуса R, проводимостью σ) помещен во внешнее однородное магнитное поле $\vec{H}_0 \cos(\omega t)$. Найти магнитный момент шара $\vec{m}$ и интенсивность излучения I, если $\delta \ll R \ll c/\omega$, где δ – толщина скин-слоя.

Будем решать задачу через скалярный магнитный потенциал Ψ. Что это такое? Одно из уравнений Максвелла - div **B** = 0. Тогда существует Ψ такое, что -grad Ψ = **B** (ср. -grad φ = **E**). И для Ψ тоже можно записать уравнение Лапласа ΔΨ=0. Причём оно даже круче, чем Δφ=0: Δφ не ноль в точках, где есть заряд, а ΔΨ=0 всюду.

Как вы понимаете, сейчас начнутся ММФ. ΔΨ=0, при этом ГУ

$$\left.\frac{\partial \Psi}{\partial r}\right|_{r=R}=0 \qquad \Psi\Big|_{r\to\infty} = -\vec{H}_0\vec{r}\cos\omega t$$

полностью аналогичны тем, которые были у нас на φ.
Первое ГУ – это как раз условие б<<R – сильного скин-эффекта. Проводник говорит НЕ ПУЩУ, NO PASARAN магнитному полю. А у нас было ГУ.

$\left.B_n^{I}\right|_{\Gamma} = \left.B_n^{II}\right|_{\Gamma}$ Коли внутри нормальная компонента **B** =0, то и снаружи придётся тоже =0. Т.к. $B_n=-\frac{\partial \Psi}{\partial r}$, вот и получаем условие равенства нулю производной. (Аналогичное условие было для электрического потенциала: $E_n = -\frac{\partial \varphi}{\partial r} = 0$).

Решение такой задачи по ММФ уже нам известно:

$$\Psi = -\vec{H}_0\vec{r}\cos\omega t + \frac{\vec{m}\vec{r}}{r^3} \qquad \vec{m} = -\frac{\vec{H}_0 R^3\cos\omega t}{2}$$

Всё точно также, как было в своё время для φ. Ну разве что у нас ещё cos ωt болтается в качестве множителя.
m – это магнитный дипольный момент, который от нас требовали в задаче. Ещё требовали интенсивность. Зная **m**, найдём сразу интенсивность по формуле из первого семестра

$$I = \frac{2}{3}\frac{\ddot{\vec{m}}^2}{c^3}$$

Подставим, получим ответ:

$$I = \frac{2}{3}\frac{\ddot{\vec{m}}^2}{c^3} = \frac{H_0^2 R^6 \omega^4}{6c^3}\cos^2\omega\tau \qquad \tau = t - \frac{r}{c}$$

ЗАДАЧА 27.3

27.3. Решить задачу 27.1 для случая $R \ll \delta \ll c/\omega$. Найти тепло, выделяющееся за единицу времени.

Н мы знаем – напоминаю, что при слабом скин-эффекте (а в условии сказано, что он слабый) магнитное поле спокойно проникает в проводник, и там оно такое же, как и снаружи.

Более того, магнитное поле навело там, понимаете ли, свои порядки – из-за того, что оно меняется по времени, породило электрическое поле согласно уравнению Максвелла

$$\boldsymbol{rot\ E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}$$

Воспользуемся тем, что мы знаем магнитное поле $\boldsymbol{B} = \mu H_0 cos\omega t \boldsymbol{e_z}$

Подставим, продифференцировав B по t:

$$\boldsymbol{rot\ E} = \frac{\omega}{c}\ \mu H_0 sin\omega t \boldsymbol{e_z}$$

Осталось найти электрическое поле в каждой точке. Мы знаем, чему равно $\boldsymbol{rot\ E}$**,** нам нужно само **E.**

Представим его как

$$\vec{E} = E_x \vec{e}_x + E_y \vec{e}_y + E_z \vec{e}_z$$

и запишем $\boldsymbol{rot\ E}$:

$$\left(\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z}\right)\vec{e}_x + \left(\frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x}\right)\vec{e}_y + \left(\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y}\right)\vec{e}_z$$

Требуется, чтобы

$\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z}$ и $\frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x}$ были = 0, а вот

$\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} = \frac{\omega}{c}\ \mu H_0 sin\omega t.$

Почему именно так? Потому что $\boldsymbol{rot\ E} = \frac{\omega}{c}\ \mu H_0 sin\omega t \boldsymbol{e_z}$! Мы приравняли к 0 коэф при $\boldsymbol{e_x}$**,** $\boldsymbol{e_y}$**,** а при $\boldsymbol{e_z}$к $\frac{\omega}{c}\ \mu H_0 sin\omega t$

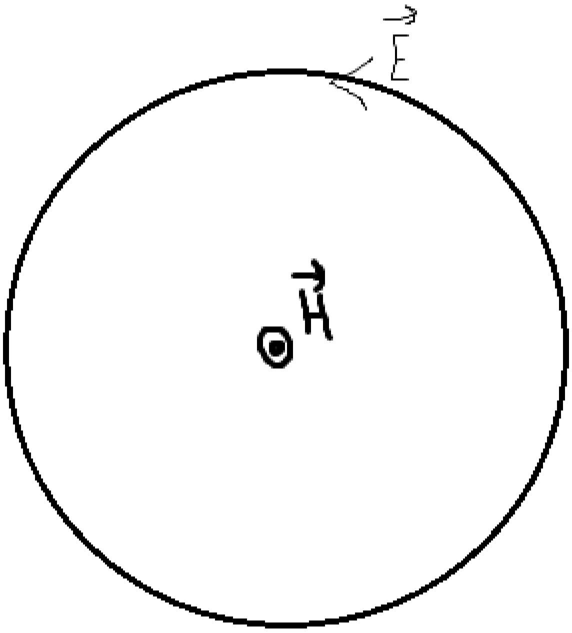
Одно из решений –

$$E_x = \frac{\mu \omega H_0}{2c} sin\omega t \cdot r \sin\theta \sin\alpha$$

$$E_y = \frac{\mu\omega H_0}{2c}\sin\omega t \cdot r\sin\theta\cos\alpha$$

Где α – угол, который обозначается как φ (просто φ мы обозначаем также и потенциал, поэтому дабы не было накладки обозначений).

В этом случае электрическое поле направлено кругами:



А модуль E равен $\frac{\mu\omega H_0}{2c}\sin\omega t \cdot r\sin\theta$

Теперь мы знаем поле **E** в каждой точке. Тогда джоулево тепло в этой точке будет **jE**=E^2/σ. Осталось проинтегрировать по всему объёму шара:

$$\frac{dQ}{dt} = \int \vec{j}\vec{E}\,dV = \sigma\int \vec{E}^2 dV =$$

$$= \frac{\sigma\mu^2\omega^2 H_0^2\sin^2\omega t}{4c^2}\underbrace{\int_0^R r^4 dr}_{\frac{R^5}{5}}\ \underbrace{\int_0^\pi \sin^3\theta\, d\theta}_{4/3}\ \underbrace{\int_0^{2\pi} d\varphi}_{2\pi} =$$

$$\frac{dQ}{dt} = \frac{2\pi\sigma\mu^2\omega^2 H_0^2\sin^2\omega t\, R^5}{15c^2}$$

ЗАДАЧА 27.3а

27.3а. Проводящий шар (радиуса R, проводимостью σ) помещен во внешнее однородное магнитное поле, постоянное по модулю и вращающееся с частотой ω, $\vec{\omega} \perp \vec{H}$. Найти момент сил, действующих на шар в приближении слабого скин-эффекта $R \ll \delta \ll c/\omega$.

Давайте плясать от того, что нам надо. Нужен момент силы (Чугревв обозначает его как **N**), для него есть формула.

$$\vec{N} = -\frac{\mu}{2c}\int\limits_{\text{по проводнику}} dV\, [\vec{H}[\vec{r}\vec{j}]]$$

{не могу не отметить наличие с в знаменателе коэфа. Мысленно замените **j** на **j**/c, т.е. $\mathbf{j}_c$ - и с пропадёт из коэффициента. Это чтобы было проще запоминать формулу}

Давайте сперва избавимся от ужасного векторного произведения, применив бессмертную классику «бац минус цаб»:

$$-\frac{\mu}{2c}\int dV \left\{\vec{r}\,\cancel{(\vec{H}\vec{j})} - \vec{j}\,(\vec{H}\vec{r})\right\}$$

(Напоминаю, что магнитное поле перпендикулярно току).

Что мы из этого не знаем? **H** мы знаем – напоминаю, что при слабом скин-эффекте (а в условии сказано, что он слабый) магнитное поле спокойно проникает в проводник, и там оно такое же, как и снаружи.
j мы не знаем. Как будем искать? Вспомним, что **j**=σ**E**. Кстати, а откуда у нас взялось в задаче электрическое поле – в условии его же не было? Потому что магнитное поле проникло в проводник и навело там, понимаете ли, свои порядки – из-за того, что оно меняется по времени, породило электрическое поле согласно

$$\mathrm{rot}\,\vec{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

уравнению Максвелла.

А далее действуем полностью аналогично предыдущей задаче. Как такое уравнение решать? Записать **E** как

$$\vec{E} = E_x\vec{e}_x + E_y\vec{e}_y + E_z\vec{e}_z$$

, взять ротор **E:**

$$\left(\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z}\right)\vec{e}_x + \left(\frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x}\right)\vec{e}_y + \left(\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y}\right)\vec{e}_z$$.

Это левая часть. Теперь надо взять магнитное поле

$$\vec{B} = \mu H_0 \cos\omega t\, \vec{e}_x + \mu H_0 \sin\omega t\, \vec{e}_y$$

, взять производную по времени

$$\frac{\mu H_0 \omega}{c} \sin\omega t\, \vec{e}_x - \frac{\mu H_0 \omega}{c} \cos\omega t\, \vec{e}_y$$

и приравнять одно к другому:

$$\left(\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z}\right)\vec{e}_x + \left(\frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x}\right)\vec{e}_y + \left(\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y}\right)\vec{e}_z = \frac{\mu H_0 \omega}{c} \sin\omega t\, \vec{e}_x - \frac{\mu H_0 \omega}{c} \cos\omega t\, \vec{e}_y$$

И тут решением является, например,

$$E_x = E_y = 0$$

,

$$E_z = \frac{\mu H_0 \omega}{c}(\sin\omega t \cdot y + \cos\omega t \cdot x) \equiv \frac{\mu\omega}{c}(\vec{H}\vec{r})$$

Всё, нашли электрическое поле, давайте домножим на σ и получим плотность тока:

$$\vec{j} = \sigma\vec{E} = \frac{\sigma\mu \vec{H}\vec{r}}{c}\omega\vec{e}_z = \frac{\sigma\mu(\vec{H}\vec{r})\vec{\omega}}{c}$$

Всё, ура, теперь мы готовы искать момент силы. Возвращаемся к $\frac{\mu}{2c}\int dV' \vec{j}(\vec{H}\vec{r})$ и подставляем плотность тока. Получаем

$$\frac{\sigma\mu\vec{\omega}}{2c^2}\int dV(\vec{H}\vec{r})^2$$

. Осталось подставить явный вид **H**. Я напомню, что скин-эффект у нас слабый, т.е. магнитное поле спокойно проходит внутрь проводника, не меняясь, так что **H** внутри такое же, как и снаружи, т.е. вращающаяся стрелочка $\mathbf{H_0}$.

$$\vec{N} = \frac{\sigma\mu^2\vec{\omega}H_0^2}{2c^2}\int_0^R r^4 dr \underbrace{\int_0^\pi \sin^3\vartheta\, d\vartheta}_{4/3} \underbrace{\int_0^{2\pi}\cos^2(\varphi-\omega t)\, d\varphi}_{\pi} = \frac{2\pi\sigma\mu^2H_0^2R^5}{15c^2}\vec{\omega}$$

Конечные итоги подведу в виде такого комикса:

СИЛЬНЫЙ СКИН-ЭФФЕКТ, малая толщина скин-слоя б. Поле внутрь не проходит:

Нормальная составляющая B на границе 0 (или, если вы решаете через магнитный скалярный потенциал, $\frac{\partial\Psi}{\partial r}$=0).

СЛАБЫЙ СКИН-ЭФФЕКТ: большая толщина скин-слоя. Тут магнитное поле спокойно проходит границу  и проникает вглубь проводника. А далее если оно меняется со временем (а оно меняется), может и электрическое создать. Оно здесь главное ☺